Bogdan Sołtys

# Zbiór Mandelbrota i zbiory Julii

30 stycznia 2023

1. Definicje:
   Liczba zespolona $c$ należy do *zbioru Mandelbrota* $M$ wtedy i tylko wtedy gdy ciąg $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + c_n \, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c \in \mathbb{C}$ jest ograniczony.
   Dla każdej liczby $c \in \mathbb{C}$ definiujemy funkcję $f_c : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$. $W_c = \{z \in \mathbb{C}\}$ ciąg $z_0 = z$, $z_{n+1} = z_n^2 + c_n \, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c \in \mathbb{C}$ jest ograniczony. *Zbiorem Julii* $J_c$ odwzorowania $f_c$ nazywamy brzeg zbioru $W_c$.
2. Zbiór Mandelbrota jest podzbiorem koła o środku $(0, 0)$ i promieniu 2.
   Oznaczmy $K = \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$. Jeśli $c \notin K$, to $\exists \; a > 0$ takie, że $|c| = 2 + a$.
   Pokażemy (indukcyjnie), że dla $n \in \mathbb{N}$, $c \notin K$, $|z_n| \geq |c|$ oraz $|z_{n+1}| \geq |z_n|(1 + a)$. $n = 1$:

$$z_1 = c \Rightarrow |z_1| = |c|$$
$$z_2 = z_1^2 + c \Rightarrow$$
$$|z_1^2| = |z_1^2 + c - c| \leq |z_1^2 + c| + |c| = |z_2| + |c| \Rightarrow |z_2| \geq |z_1^2| - |c| = |c^2| - |c| = |c|(|c| - 1) = |c|(a + 1) = |$$

   Krok indukcyjny:
   $|z_n^2| = |z_n^2 + c - c| \Rightarrow |z_n^2| \leq |z_n^2 + c| + |c| = |z_{n+1}| + |c| \Rightarrow |z_{n+1}| \geq |z_n^2| - |c| \geq |z_n^2| - |z_n| = |z_n|(|z_n| -$
   Zatem, jeśli $c \notin K$, to ciąg $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ rośnie nieograniczenie.
3. Jeśli dla pewnego $n_0 \geq 0 \, |z_{n_0}| > 2$, to ciąg $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nieograniczony.
   Z poprzedniego punktu wiadomo, że jeśli $|c| > 2$, to ciąg $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nieograniczony. Można zatem założyć, że $|c| \leq 2$. Definiujemy $b = |z_{n_0}| - 2$, $|z_{n_0+1}| = |z_{n_0}^2 + c| \geq |z_{n_0}|^2 - |c| = 4 + 4b + b^2 - 2 \geq 2 + 4b$ Indukcyjnie dowodzimy, że $|z_{n_0+k}| \geq 2 + 4^k b \, \forall k \in \mathbb{N}$.
4. Niech $B$ oznacza rzeczywisty zbiór Mandelbrota, tzn. $B = \{c \in M : \Im(c) = 0\}$.
   Udowodnimy, że $B = [-2, \frac{1}{4}]$. Oczywiście $B \subset [-2; 2]$.
   (a) $[-2; 0] \subset B$: Udowodnimy indukcyjnie, że $\forall n \in \mathbb{N} \, z_n \in [-|c|, |c|]$.

$$z_1 = c, \; z_{n+1} = z_n^2 + c \leq c^2 + c = c(c + 1) \Rightarrow |z_{n+1}| \leq |c||c + 1| \leq |c|$$

   bowiem $c + 1 \in [-1; 1]$.
   (b) $[0; \frac{1}{4}] \subset B$: Udowodnimy indukcyjnie, że $\forall n \in \mathbb{N} \, z_n \in [0; \frac{1}{2}]$.
   $z_1 = c$, $z_{n+1} = z_n^2 + c \leq (\frac{1}{2}2)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
   (c) Jeśli $c > \frac{1}{4}$, to $c \notin B$: Wykażemy indukcyjnie, że ciąg $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rosnący. Jeśli $z_n = z_{n-1}^2 + c \geq z_{n-1}$, to $z_{n+1} = z_n^2 + c \geq z_{n-1}^2 + c = z_n$.
   Każdy ciąg rosnący ma granicę $\in [0; \infty]$. Mamy pokazać, że ciąg jest nieograniczony, tzn. ma granicę $\infty$. Przypuśćmy (dowód nie wprost), że $g < \infty$ Niech $g = \lim_{n \to \infty} z_n$ oraz $f(z) = z^2 + c$. Ponieważ $z_{n+1} = f(z_n)$ oraz funkcja $f$ jest ciągła, to $\lim_{n \to \infty} z_n = f(g)$. Ciąg może mieć tylko jedną granicę, zatem $g = f(g)$, czyli liczba $g$ jest rozwiązaniem równania $g = g^2 + c$. Łatwo sprawdzić, że dla $c > \frac{1}{4}$ równanie to nie ma rozwiązań rzeczywistych.
5. Jeżeli $|z| > \max(2, |c|)$,to $z \notin J_c$. Oznaczmy przez $a$ liczbę (dodatnią), taką że $|z| = 2 + a$. Z nierówności trójkąta dostajemy $|z|^2 = |z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$ a stąd $|z^2 + c| \geq |z|^2 - c \geq |z|^2 - |z| = (|z| - 1)|z| = (1 + a)|z|$.

Oznacza to, że $|z_{n+1}| \geq (1+a)|z_n| \, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow |z_{n+1}| \geq (1+a)^{n+1}|z|$, a więc ciąg $(z_n)$ jest nieograniczony.

6. Wystarczy pokazać, że $0 \notin J_c$. Z definicji zbiorów Julii $J_c$ oraz zbioru Mandelbrota $M$ bezpośrednio wynika, że $0 \in J_c \Leftrightarrow c \in M$. W punkcie 4(c) pokazaliśmy, że jeśli $c \in \mathbb{R} \wedge c > \frac{1}{4}$, to $c \notin M$.
7. Zakładamy, że $c \leq \frac{1}{4}$. Definiujemy funkcję $f(x) = x^2 + c$. Niech $d = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$, ($d$ jest jedynym pierwiastkiem równania $x = x^2 + c$ jeśli $c = \frac{1}{4}$, oraz większym z pierwiastków równania $x = x^2 + c$ jeśli $c < \frac{1}{4}$).
   (a) Załóżmy, że $y \leq d$. Ponieważ zbiór Julii $J_c$ ma środek symetrii w punkcie 0, można dodatkowo założyć, że $y \geq 0$. Dla argumentów dodatnich funkcja $f$ jest rosnąca, zatem $f(y) \leq f(d) = d$, indukcyjnie dowodzimy, że ciąg: $y_0 = y, y_{n+1} = f(y_n) \, n \in \mathbb{N} \cup 0$ jest ograniczony (przez liczbę $d$), zatem $y \in J_c$.
   (b) Załóżmy, że $y > d$. Na półprostej $[d; \infty)$ funkcja $f$ jest rosnąca, zatem ciąg: $y_0 = y, y_{n+1} = f(y_n)$ $n \in \mathbb{N} \cup 0$ jest rosnący. Ma więc granicę (skończoną lub nieskończoną). Załóżmy, że ma granicę skończoną $g = \lim_{n\to\infty} y_n$, ponieważ $y_0 > d$ oraz ciąg $(y_n)$ jest rosnący, to $g > d$. Podobnie jak w punkcie 4(c) dowodzimy, że granica $g$ spełnia równanie $x = f(x)$, równanie to nie ma rozwiązań większych niż $d$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $g = \infty$, tzn. $y \notin J_c$.