Bogdan Sołtys

Metoda Newtona i równanie $z^k = 1$

30 stycznia 2023

Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ma ciągłą pochodną. Dla (prawie) każdej liczby zespolonej z_0 tworzymy ciąg $(z_n)_{n\geqslant 0}$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \qquad \forall n \geqslant 0 \tag{1}$$

ciąg ten będziemy nazywać *orbitą* liczby z_0 i oznaczać symbolem $O(z_0)$.

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy tylko takie liczby z_0, których orbita jest ciągiem nieskończonym, tzn. $\forall n \geqslant 0\, f'(z_n) \neq 0$.

Stwierdzenie 1. *Jeśli orbita liczby z_0 ma granicę $\tilde{z}$, to liczba $\tilde{z}$ jest rozwiązaniem równania $f(z) = 0$.*

Dowód. Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : f'(z) \neq 0\}$, $h : D \to \mathbb{C}$, $h(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$. Funkcja h jest ciągła. Załóżmy, że ciąg $(z_n)_{n\geqslant 0}$, $z_{n+1} = h(z_n)$ jest dobrze określony, tzn. $\forall n \geqslant 0\ f'(z_n) \neq 0$ oraz zbieżny: $\lim_{n\to\infty} z_n = \tilde{z}$. Z ciągłości funkcji h wynika, że $\lim_{n\to\infty} h(z_n) = h(\tilde{z})$. Ciąg $h(z_n)_{n\geqslant 0}$ jest przesuniętym o jeden wyraz ciągiem $(z_n)_{n\geqslant 0}$, zatem $\lim_{n\to\infty} h(z_n) = \tilde{z}$. Ponieważ ciąg może mieć tylko jedną granicę, to $h(\tilde{z}) = \tilde{z} \Rightarrow f(\tilde{z}) = 0$. $\square$

Zastosujemy metodę Newtona do funkcji $f(z) = z^k - 1$, $k \in \mathbb{N} \wedge k \geqslant 2$. Pierwiastkami równania $z^k = 1$ są liczby $w_m = e^{\frac{m}{k}2\pi\imath}$, $m = 0, 1, \ldots, k-1$.

Problem jest następujący: wybieramy liczbę z_0, do której z liczb w_m zbieżna jest orbita liczby z_0 (jeśli w ogóle jest zbieżna)? Analityczne rozwiązanie tego problemu nie jest chyba możliwe.

Dla funkcji $f(z) = z^k - 1$ wzór (1) przybiera postać:

$$z_{n+1} = \frac{k-1}{k} z_n + \frac{1}{k z_n^{k-1}} \tag{2}$$

Stosowane dalej oznaczenia:

— $\alpha_m = \left\{ r e^{\frac{m}{2}k2\pi\imath} : r > 0 \right\}$, $m = 0, 1, \ldots, 2k-1$ półprosta o końcu w początku układu,
półproste α_m i $\alpha_{m\oplus_k k}$ są swoimi przedłużeniami, $\oplus_k$ oznacza sumę modulo k
jeśli m jest parzyste, to półprosta α_m zawiera dokładnie jeden pierwiastek równania $z^k = 1$, a mianowicie $w_{\frac{m}{2}}$
jeśli m jest nieparzyste, to półprosta α_m nie zawiera żadnego pierwiastka równania $z^k = 1$

— β_m, $m = 0, 1, \ldots, 2k-1$ prosta (przechodząca przez początek układu) zawierająca półprostą α_m, proste β_m i β_{m+k} są identyczne, możemy zatem ograniczyć się do $m = 0, 1, \ldots, k-1$

— $\phi_k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = (\frac{k-1}{k}x + \frac{1}{kx^{k-1}})$, $k \in \mathbb{N} \wedge k \geqslant 2$,

— $\psi_k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = (\frac{k-1}{k}x - \frac{1}{kx^{k-1}})$, $k \in \mathbb{N} \wedge k \geqslant 2$.

Jeśli liczba k jest nieparzysta, to każda prosta β_m zawiera dokładnie jeden pierwiastek równania $z^k = 1$.

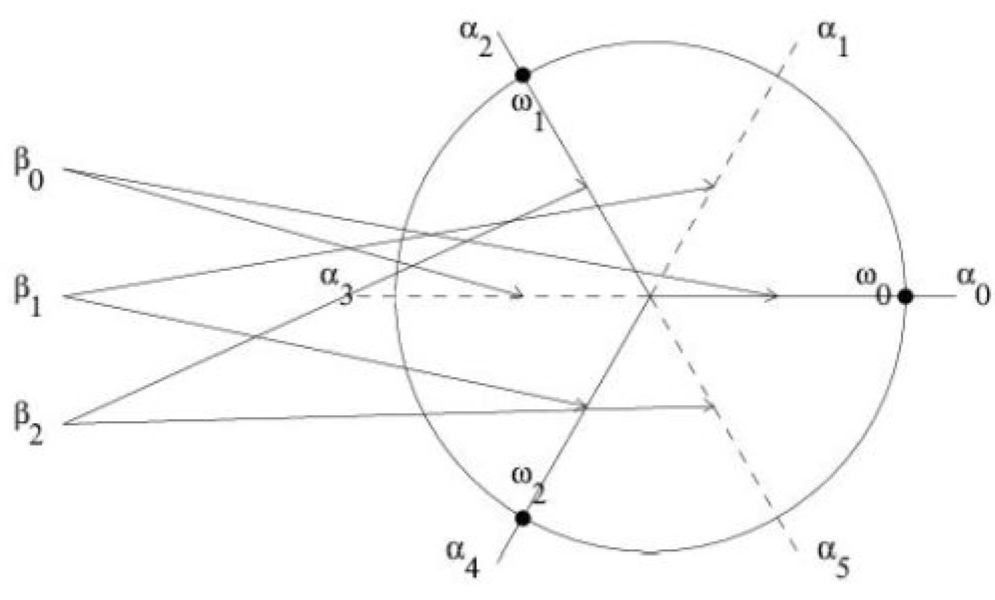
Jeśli liczba k jest parzysta, to każda prosta β_m zawiera dwa lub zero pierwiastków równania $z^k = 1$.

Orbity zaczynające się na prostych β_m zachowują się następująco:

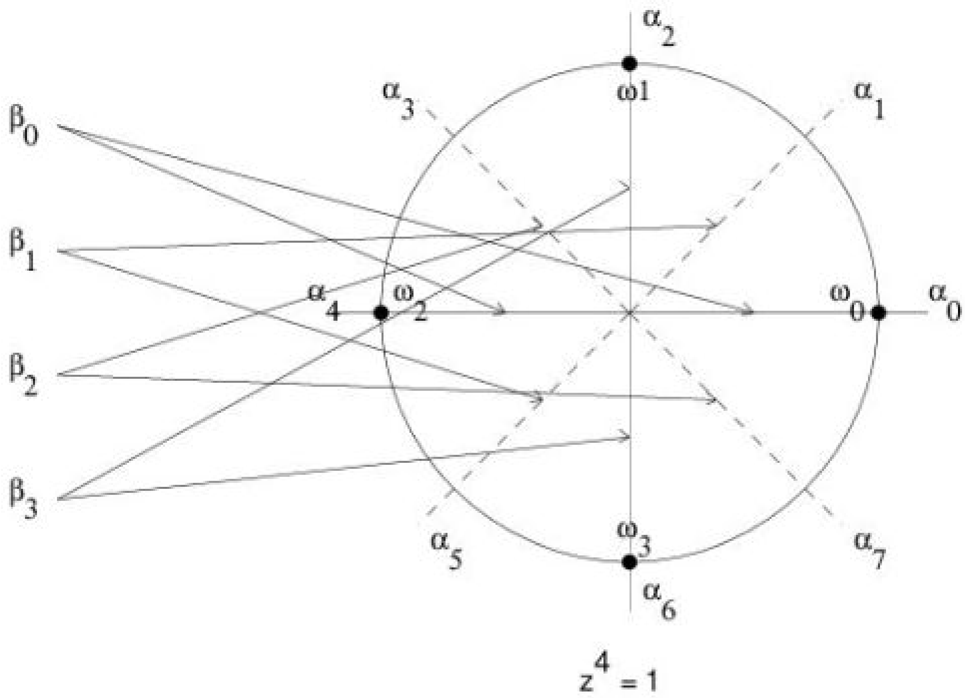
Jeśli prosta β_m nie zawiera pierwiastków równania $z^k = 1$, to orbita nie jest zbieżna (2).

Jeśli prosta β_m zawiera jeden pierwiastek równania $z^k = 1$, to orbita jest zbieżna do tego pierwiastka (3).

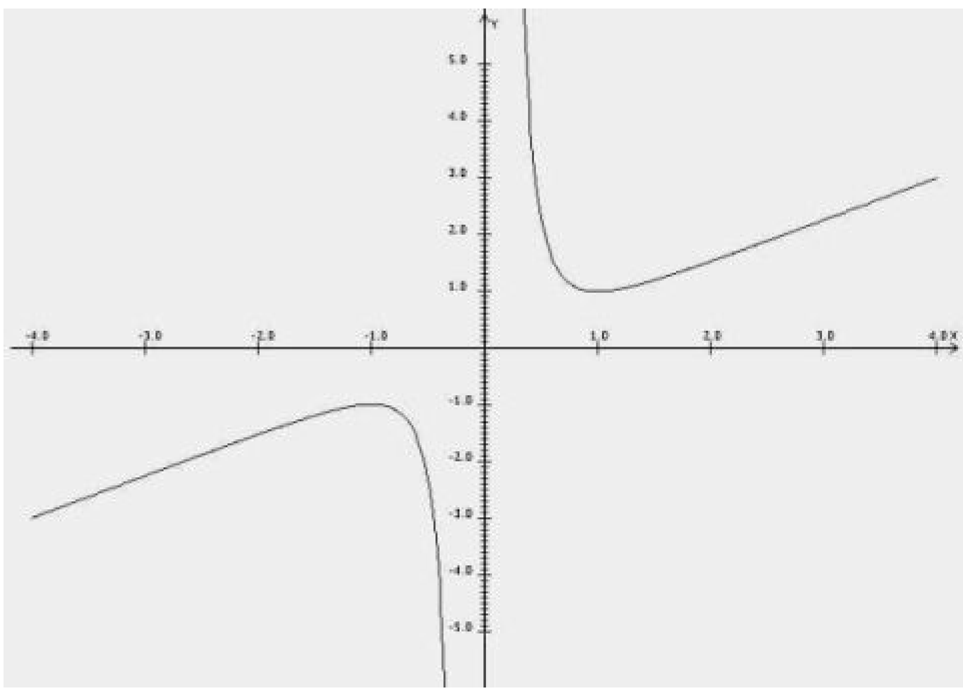
Jeśli prosta β_m zawiera dwa pierwiastki równania $z^k = 1$, to orbita $O(z_0)$ jest zbieżna do tego pierwiastka równania $z^k = 1$, który leży na tej samej półprostej α co liczba z_0(stwierdzenie 2).



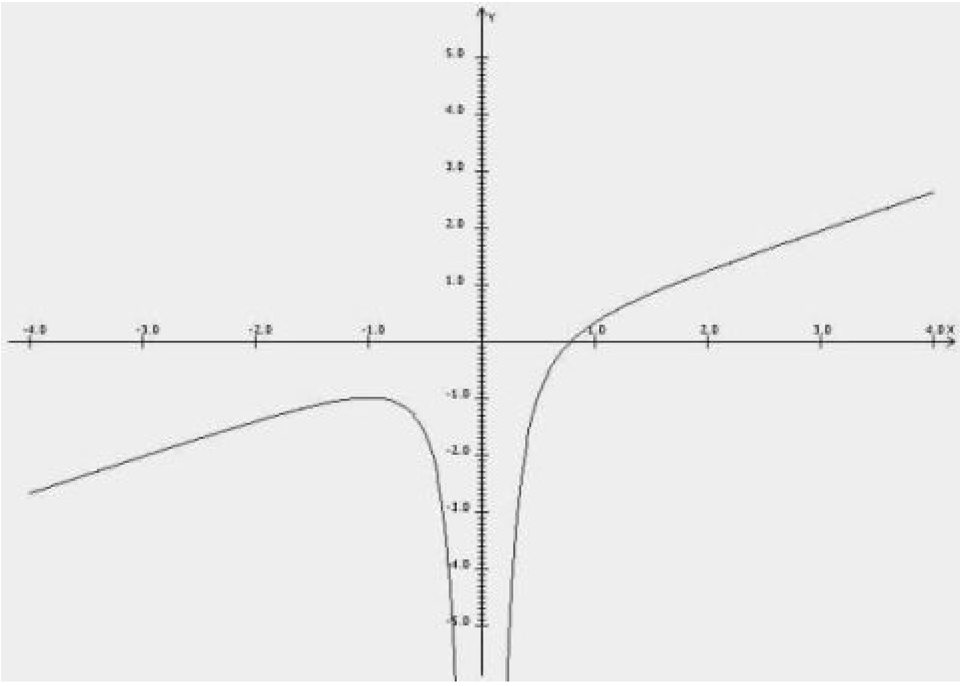
$z^3 = 1$



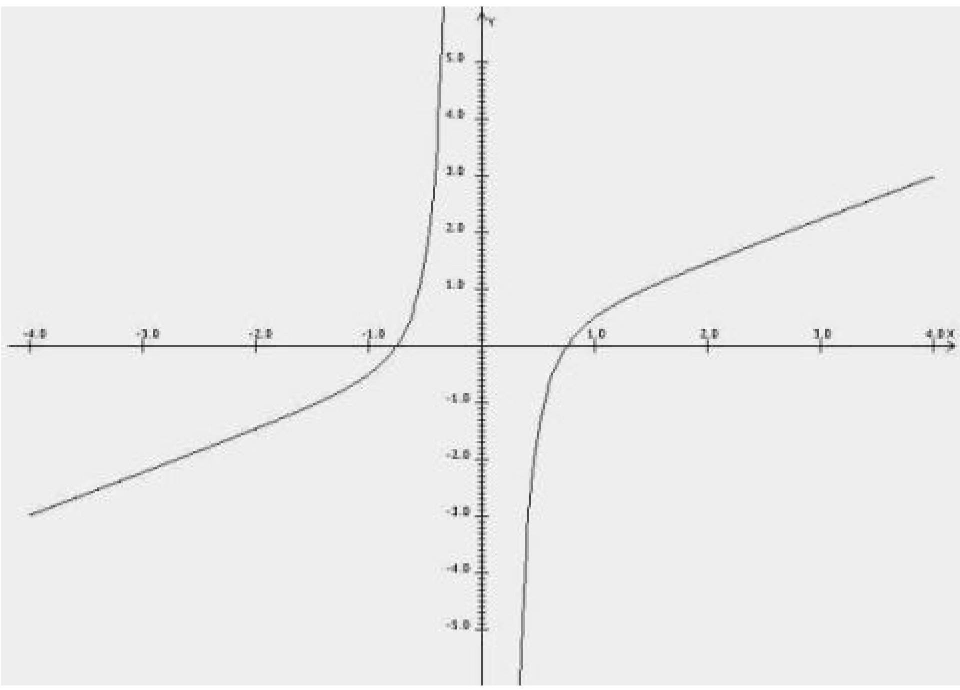
Przykładowe wykresy funkcji ϕ_k i ψ_k



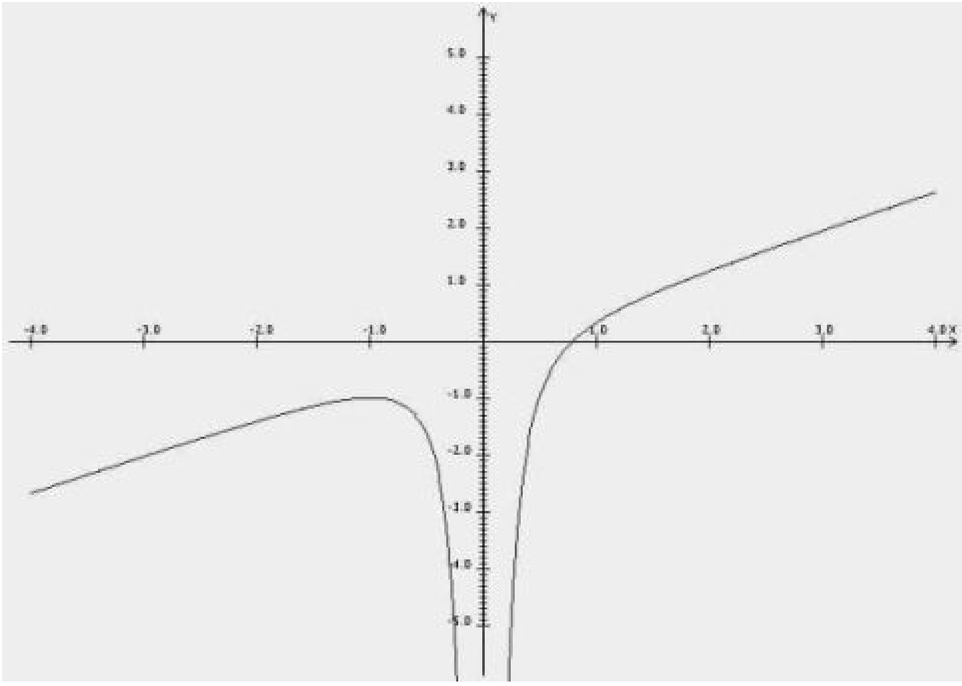
Rysunek 1. Wykres funkcji ϕ_4



Rysunek 2. Wykres funkcji ϕ_3



Rysunek 3. Wykres funkcji ψ_4



Rysunek 4. Wykres funkcji ψ_3

Stwierdzenie 2. *Jeśli liczba m jest parzysta oraz $z_0 \in \alpha_m$, to $O(z_0) \subset \alpha_m$, ponadto orbita $O(z_0)$ jest zbieżna.*

Dowód. Załóżmy, że $z_n \in \alpha_m$, tzn. $z_n = r_n e^{\phi\imath}$, $r_n > 0 \wedge \phi = \frac{m}{2}k2\pi$. Wtedy $z_{n+1} = \frac{k-1}{k} r_n e^{\phi\imath} + \frac{1}{k r_n^{k-1} e^{(k-1)\phi\imath}} = \frac{k-1}{k} r_n e^{\phi\imath} + \frac{1}{k r_n^{k-1}} e^{(2\pi-(k-1)\phi)\imath}$.

$$(k-1)\phi = (k-1)\frac{m}{2}k2\pi = (k-1)m\pi$$
$$\phi - m\pi = km\pi - m\pi = (k-1)m\pi$$

Zatem

$$2\pi - (k-1)\phi = 2\pi - m\pi + \phi \tag{3}$$

z powyższego i z parzystości m:

$$e^{(2\pi-(k-1)\phi)\imath} = e^{(2\pi-m\pi+\phi)\imath} = e^{\phi\imath} \tag{4}$$
$$z_{n+1} = \left(\frac{k-1}{k} r_n + \frac{1}{k r_n^{k-1}}\right) e^{\phi\imath} \in \alpha_m$$

Aby udowodnić zbieżność orbity, wystarczy wykazać, że $\forall k \geqslant 2 \wedge \forall r > 0$ ciąg liczbowy $a_0 = r$, $a_{n+1} = (\frac{k-1}{k} a_n + \frac{1}{k a_n^{k-1}})$ jest zbieżny. Jeżeli $n \geqslant 0$, to $a_n \geqslant 0$ oraz $a_{n+1} - a_n = \frac{k-1}{k} a_n + \frac{1}{k} a_n^{1-k} - a_n = \frac{1}{k} a_n (\frac{1}{a_n^k} - 1) \leqslant 0$. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zatem malejący oraz ograniczony z dołu, zatem zbieżny. □

Stwierdzenie 3. *Jeśli $z_0 \in \beta_m$, to orbita $O(z_0) \subset \beta_m$.*

Dowód. Jeżeli m jest parzyste, to teza wynika z tego, że prosta β_m jest sumą dwóch półprostych α i ze stwierdzenia (3).
Jeżeli m jest nieparzyste, to

$$e^{(2\pi-(k-1)\phi)\imath} = e^{(2\pi-m\pi+\phi)\imath} = e^{-\phi\imath}$$

Zatem

$$z_{n+1} = \left(\frac{k-1}{k} r_n - \frac{1}{k r_n^{k-1}}\right) e^{\phi\imath} \in \beta_m$$

□

Wniosek 1. *Jeśli liczba k jest parzysta, liczba m jest nieparzysta oraz $z_0 \in \beta_m$, to orbita $O(z_0)$ nie jest zbieżna.*

Dowód. (Nie wprost). $\tilde{z} = \lim_{n\to\infty} z_n$. Zbiór β_m jest domknięty oraz (stwierdzenie 3) $z_n \in \beta_m \, \forall n$, zatem $\tilde{z} \in \beta_m$. Ze stwierdzenia (1) wynika, że liczba $\tilde{z}$ spełnia równanie $\tilde{z}^k = 1$. Żaden pierwiastek równania $z^k = 1$ nie leży na prostej β_m. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że ciąg $(z_n)_{n\geqslant 0}$ nie ma granicy. □

Wniosek 2. *Jeśli obie liczby m, k są nieparzyste oraz $z_0 \in \alpha_m$, to orbita $O(z_0)$ jest zbieżna.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że $\forall k \geqslant 3 \wedge r > 0$ ciąg liczbowy $a_0 = r$, $a_{n+1} = (\frac{k-1}{k} a_n - \frac{1}{k a_n^{k-1}}) = \psi_k(a_n)$ jest zbieżny. Łatwo zobaczyć, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant n_0$ $a_n < 0$. W konsekwencji, dla $n \geqslant n_0 + 1$ $a_n \leqslant -1$.

Zatem (dla $n \geqslant n_0 + 1$) $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{k}(a_n + \frac{1}{a_n^{k-1}}) \geqslant 0$. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest więc rosnący (od wyrazu $n_0 + 1$) i ograniczony z góry, a więc jest zbieżny. □

Dla miłośników konkretów:

Stwierdzenie 4. *Jeśli $k = 4$ oraz $z_0 \in \alpha_1$, to orbita $O(z_1)$ nie jest zbieżna.*

Dowód. Dla funkcji $f(z) = z^4 - 1$ wzór $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ przyjmuje postać: $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^4 - 1}{4} z_n^3 = \frac{3}{4} z_n + \frac{1}{4 z_n^3}$. W dalszych rachunkach będę korzystał z postaci wykładniczej liczb zespolonych. Ponieważ $z_0 = 1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}\imath}$, to $z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4} e^{\frac{\pi}{4}\imath} + \frac{1}{8\sqrt{2} e^{3\frac{\pi}{4}\imath}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} e^{\frac{\pi}{4}\imath} + \frac{1}{8\sqrt{2}} e^{5\frac{\pi}{4}\imath} = (\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{8\sqrt{2}}) e^{\frac{\pi}{4}\imath}$. Analogicznie dowodzimy następującego faktu: Jeśli liczba zespolona z_n leży na prostej o równaniu $\Re(z) = \Im(z)$(tzn. $y = x$), to liczba z_{n+1} również leży na tej prostej. Gdyby ciąg $(z_n)_{n\geqslant 0}$ był zbieżny, to jego granica $\tilde{z}$ też leżałaby tej prostej, ponadto (stwierdzenie 1) liczba $\tilde{z}$ spełniałaby równanie $z^4 = 1$ Żadne rozwiązanie tego równania nie leży na prostej $\Re(z) = \Im(z)$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że ciąg $(z_n)_{n\geqslant 0}$ nie jest zbieżny. □