Bogdan Sołtys

Atraktory odwzorowań Hutchinsona

30 listopada 2022

0. Symbol $||\cdot||$ oznacza dowolną normę w $\mathbb{R}^2$. Osoby nieznające pojęcia normy mogą przyjąć, że $||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}$.
1. Niech Λ oznacza rodzinę wszystkich zwartych (tzn. domkniętych i ograniczonych) podzbiorów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Dla każdego zbioru $D \in \Lambda$ oraz dla każdego punktu $\alpha \in \mathbb{R}^2$ odległość punktu α od zbioru D określamy wzorem $d(\alpha, D) = min(||\alpha - d|| : d \in D)$. Wówczas funkcja $\rho : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R}$ określona wzorem $\rho(C,D) = max(\substack{max \\ x \in C}(d(x,D)), \substack{max \\ x \in D}(d(x,C)))$ jest metryką. Nazywamy ją *metryką Hausdorffa*. Zbiór Λ wyposażony w metrykę ρ jest zupełną przestrzenią metryczną.
2. Mówimy, że odwzorowanie afiniczne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest *zbliżające*, jeżeli spełnia warunek (*): $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ $||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$. Jeśli odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nie jest afiniczne, to w definicji odwzorowania zbliżającego warunek (*) trzeba zastąpić mocniejszym warunkiem (**): $\exists q < 1$ takie, że $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ $||f(x) - f(y)|| \le q||x - y||$. (Dla odwzorowań afinicznych warunki (*) i (**) są równoważne.)
3. Każdy (skończony) ciąg odwzorowań afinicznych $f_1, \ldots, f_k$ wyznacza *odwzorowanie Hutchinsona* $H : \Lambda \to \Lambda$ $H(D) = f_1(D) \cup \ldots \cup f_k(D)$. Można wykazać, że jeśli odwzorowania afiniczne $f_1, \ldots, f_k$ są zbliżające, to również wyznaczone przez nie odwzorowanie Hutchinsona jest zbliżające (w metryce Hausdorffa).
4. Do zupełnej przestrzeni metrycznej (Λ, ρ) i odwzorowania Hutchinsona $H : \Lambda \to \Lambda$ możemy zastosować twierdzenie Banacha o odwzorowaniu zbliżającym (o kontrakcji), by wywnioskować, że dla dowolnego zbioru $D_0 \in \Lambda$ ciąg zbiorów $D_0, D_1 = H(D_0), \ldots, D_{n+1} = H(D_n), \ldots$ $n \in \mathbb{N}$ ma granicę. Co więcej, granica ta nie zależy od wyboru zbioru D. Tę granicę nazywamy *atraktorem* odwzorowania Hutchinsona i oznaczamy A_H.
5. Twierdzenie Banacha o odwzorowaniu zbliżającym. Jeśli przestrzeń metryczna (X, ρ) jest zupełna, a odwzorowanie $f : X \to X$ jest zbliżające, to:
   — dla każdego punktu $x_0 \in X$ ciąg kolejnych iteracji $x_0, x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ $n \in \mathbb{N}$ jest zbieżny,
   — granica powyższego ciągu nie zależy od wyboru punktu początkowego x_0,
   — granica $\tilde{x}$ powyższego ciągu jest jedynym rozwiązaniem równania $f(x) = x$.
6. Jeśli dla pewnego $1 \le i \le k$ $f_i(x) = x$ $(x \in \mathbb{R}^2)$, to $x \in A_H$.
   Dowód: Załóżmy, że $f_1(x) = x$, tworzymy ciąg zbiorów zbieżny do atraktora (p. 4), zaczynając od zbioru $D_0 = \{x\}$. Wówczas $D_1 = f_1(D_0) \cup \ldots \cup f_k(D_0) \ni x$, indukcyjnie dowodzimy, że $x \in D_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Zatem $x \in A_H$.
   Ponieważ każde z równań $f_i(x) = x$ ma rozwiązanie, to potrafimy zawsze wskazać co najmniej jeden punkt należący do atraktora.